Topologie Algébrique TD 3

21 Octobre 2011

3 Homotopie

3.1 Théorie élémentaire

Exercice 3.1 1. Montrer que l'inclusion $\mathbb{S}^n \to \mathbf{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ est une équivalence d'homotopie.

2. Est-ce que $\mathbb{S}^1$ est homéomorphe à $\mathbf{R}^2 \backslash \{0\}$? Pourquoi ? Et pour les dimensions supérieures ?

Indications:

1. En fait, c'est un rétracte par déformation forte.

2. Non. Il y a plusieurs arguments possibles.
– $\mathbb{S}^n$ est compact mais $\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$ est non-compact.
– **(Argument de dimension)** Tout point de $\mathbf{R}^2 \backslash \{0\}$ admet un voisinage ayant la propriété de rester connexe après enlever un point. Mais $\mathbb{S}^1$ n'a pas cette propriété. En dimension supérieure, il faut utiliser la cohomologie locale pour généraliser cet argument.
– $\mathbb{S}^1$ avec deux points distincts enlevés est non-connexe, mais $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ reste connexe si on enlève un nombre fini de points.

Exercice 3.2 Soient X, Y deux espaces topologiques, et $f : X \to Y$, $g : Y \to X$, $h : Y \to X$ trois applications continues. Si on a des homotopies $f \circ g \sim \mathrm{id}_Y$ et $h \circ f \sim \mathrm{id}_X$, montrer que f est une équivalence d'homotopie, et $g \sim h$. Plus généralement, si on suppose seulement que $f \circ g$ et $h \circ f$ sont des équivalences d'homotopie, montrer que f, g, h sont tous des équivalences d'homotopie.

Indications:

Par l'hypothèse, $g \sim (hf)g = hfg = h(fg) \sim h$, donc g et h sont homotopes. Par conséquent, $fh \sim fg \sim \mathbf{id}$, et on a bien $hf \sim \mathbf{id}$, donc f est bien une équivalence d'homotopie. Le cas général s'en déduit immédiatement.

Exercice 3.3 (Rétractes) On va comparer les trois notions : *rétracte*, *rétracte par déformation* et *rétracte par déformation forte*.

1. Soit X un espace topologique, $x \in X$ un point. Montrer que x est un rétracte de X. Si X n'est pas connexe par arc, est-il un rétracte par déformation de X ?

2. On note $\mathbb{D}^n := \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ la boule unité fermée dans $\mathbf{R}^n$, et $\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| = 1\}$ son bord. Soit T un sous-espace non-vide de $\mathbb{D}^n$ tel que $T \cap \mathbb{S}^{n-1} = \emptyset$. Montrer que $\mathbb{S}^{n-1}$ est un rétracte de $\mathbb{D}^n \backslash T$. Construire des exemples de rétracte qui n'est pas un rétracte par déformation.

3. **(Le peigne)** Soit $P \subset \mathbf{R}^2$ le sous-espace :

$$I \times \{0\} \cup ((\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}_+\} \cup (\mathbf{Q} \cap (1/2, 1))) \times I)$$

muni de la topologie de sous-espace.
(a) Montrer que P est contractile.
(b) Déterminer la condition pour un point de P d'être un rétracte de P, un rétracte par déformation de P, un rétracte par déformation forte de P respectivement.

Indications:

1. On a toujours un morphisme continu constant $r : X \to \{x\}$, qui vérifie bien la condition d'être rétracte : $r \circ i = \mathrm{id}_{\{x\}}$. Par contre, dans le cas où X n'est pas connexe par arc, x ne peut pas être un rétracte par déformation de X : si l'application constante $e_x = i \circ r$ est homotope à id_X, on prends un point y qui n'est pas dans la même composante connexe par arc que x, et on regarde la 'trajectoire' de y selon l'homotopie (qui est un chemin), il dépars de x et arrive à y, qui sont pas dans la même composante, d'où une contradiction.

2. Quitte à 'bouger' les trous T, on peut supposer que $0 \in T$, alors la projection depuis le centre est bien une rétraction. D'autre part, on peut aisément construire un T de sorte que $\mathbb{D}^n \backslash T$ n'a pas le même type d'homotopie que $\mathbb{S}^{n-1}$, donc $\mathbb{S}^{n-1}$ ne peut pas être un rétracte par déformation de $\mathbb{D}^n \backslash T$.

3. Tout point est un rétracte par déformation de P, en fait, la contractibilité suffit. L'ensemble des points qui peuvent être un rétracte par déformation forte est

$$I \times \{0\} \cup ((\{\frac{1}{n} : n \geq 3\}) \times I).$$

Exercice 3.4 Montrer qu'un rétracte d'un espace contractile est contractile.

Indications:

Soit X contractile, A un rétracte de X, $r : X \to A$ la rétraction et $i : A \to X$ l'inclusion. Soit $H : X \times I \to X$ l'homotopie entre id_X et le morphisme constant $X \to \{x_0\}$, alors la composition

$$A \times I \xrightarrow{i \times \mathrm{id}_I} X \times I \xrightarrow{H} X \xrightarrow{r} A$$

est bien un homotopie entre id_A et le morphisme constant $X \to \{r(x_0)\}$.

Exercice 3.5 (Exemples d'équivalences d'homotopie) 1. Soit E est un fibré vectoriel sur X, montrer que X et E sont homotopiquement équivalents.

2. Montrer que le ruban de Möbius et son cercle au milieu sont homotopiquement équivalents.
3. Pour un entier $n \in \mathbf{Z}$, on note S_n le cercle dans $\mathbf{R}^2$ centré à $(n, 0)$ de rayon 1. Montrer que $S_{-1} \cup S_1$, $S_0 \cup ([-1, 1] \times \{0\})$ et $S_{-2} \cup ([-1, 1] \times \{0\}) \cup S_2$ sont homotopiquement équivalents.
4. Classifier les 26 lettres capitaux par ses types d'homotopie.
5. * Classifier les caractères chinoises par ses types d'homotopie...

Indications:

1. C'est un rétracte par déformation : l'homotopie entre $\mathbf{id}_E$ et la projection $\pi : E \to X$ est simplement $H(v, t) := tv$, où $v \in E$ et $t \in I$.

2. C'est un rétracte par déformation. En fait, c'est un cas particulier de 1 : on peut voir le ruban de Möbius comme un fibré en droite (fibré vectoriel réel de rang 1) sur le cercle au milieu.

3. Tous sont des rétracte par déformation de '8' grossi (ou $\mathbf{R}^2 - \{P, Q\}$). Ou on peut le résoudre facilement en appliquant Critère I du Théorème 3.7.

4. $\{A, D, O, P, Q, R\}, \{B\}, \{C, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, S, T, U, V, W, X, Y, Z\}$

5. Bonne chance !

3.2 Théorie plus avancée

Exercice 3.6 (Cofibrations) Soit $i : A \to X$ une application continue entre deux espaces topologiques[1]. On dit que i est une *cofibration*, noté $i : A \hookrightarrow X$ ou $i : A \rightarrowtail X$, si elle satisfait la *propriété d'extension d'homotopie* suivante :

(HEP[2]**)** : Pour tout espace topologique Y, si on a une application continue $f : X \to Y$ et un homotopie $H : A \times I \to Y$ tel que $H|_{A\times 0} = f \circ i$, alors il existe un homotopie $\widetilde{H} : X \times I \to Y$ tel que $\widetilde{H}|_{X\times 0} = f$ et $\widetilde{H} \circ (i \times \mathrm{id}_I) = H$.

1. Montrer qu'une cofibration est toujours un morphisme injectif d'image fermé. Donc on considère souvent le cas d'une paire d'espace topologique (X, A) constituée d'un espace topologique X et un sous-espace fermé A, on dit qu'une paire est une cofibration, si l'inclusion est une cofibration.

1. Tous les espaces topologiques sont toujours supposés séparés.
2. Homotopy Extension Property, ou 'HEP' pour abréger.

2. Montrer que (X, A) est une cofibration si et seulement si le cylindre

$$Mi := (X \times 0) \cup_A A \times I$$

est un rétracte de $X \times I$.

3. **(Exemple)** Montrer que $(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ est une cofibration. En déduire par récurrence que toute paire de CW-complexes est une cofibration.
4. **(Contre-exemple)** $(\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}_+\}, I)$ n'est pas une cofibration.
5. **(Push-out)** Soit (X, A) une cofibration, soit $g : A \to Y$ une application continue vers un autre espace topologique, montrer que $(Y \cup_A X, Y)$ est aussi une cofibration.
6. ***(Critère de cofibration)** Une paire d'espaces topologiques (X, A) est une cofibration si et seulement si elle est une *NDR-paire*[3], c'est-à-dire, il existe une fonction continue $u : X \to I$ avec $A = u^{-1}(0)$, et un homotopie $H : X \times I \to X$ satisfait les conditions suivantes :
   – $H|_{X\times 0} = \mathrm{id}_X$;
   – $H|_{A\times I} = pr_A$, la projection sur le premier facteur ;
   – Pour tout $x \in X$ tel que $u(x) < 1$, on a $H(x, 1) \in A$.
7. **(Remplacement)** Soit $f : X \to Y$ une application continue entre deux espaces topologiques. Chercher une factorisation de f comme la composition d'une cofibration suivie par une équivalence d'homotopie. Autrement dit, d'un point de vu d'homotopie, on peut remplacer n'importe quel morphisme par une cofibration.

Indications:

1. On résume la situation par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j_0|_A"'] & X \arrow[d, "j_0"] \arrow[ddr, "i_0"] & \\
A \times I \arrow[r, "i\times\mathrm{id}"] \arrow[drr, "H"'] & X \times I \arrow[dr, dashed, "\widetilde{H}"] & \\
& & Mi
\end{tikzcd}$$

où j_0 est l'inclusion induite par $\{0\} \to I$, i_0 et H sont des morphismes naturels, et l'existence de $\widetilde{H}$ vient de la propriété d'extension d'homotopie (HEP). D'autre part, par la propriété universelle de push-out Mi, on a un morphisme $j : Mi \to X \times I$ rendant le diagramme commutatif. Et on considère $\widetilde{H} \circ j$, par la partie d'unicité dans la propriété universelle de Mi on a de plus

$$\widetilde{H} \circ j = \mathrm{id}_{Mi}\,. \qquad (1)$$

En particulier, j est injectif, en restreignant j en $A \times \{1/2\}$, on obtient que

$$i : A \simeq A \times \{1/2\} \to X \times \{1/2\} \simeq X$$

3. NDR=Neighborhood Deformation Retract

est injectif.
Or l'image de Mi dans $X \times I$ est l'ensemble des points fixés de l'endomorphisme $j \circ \widetilde{H}$ de $X \times I$. Par le fait que le sous-espace des points fixés d'un endomorphisme d'un espace topologique (séparé) est toujours fermé, on sait que l'image de Mi dans $X \times I$ est fermé, en faisant intersection avec le fermé $X \times \{1/2\}$, on obtient que $i(A) \times \{1/2\} = j(Mi) \cap X \times \{1/2\}$ est fermé dans $X \times I$, ainsi fermé dans $X \times \{1/2\}$.

2. L'égalité (1) implique que Mi est un rétracte de $X \times I$.

4. Parce que la peigne $I \times \{0\} \cup (\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}_+\}) \times I$ n'est pas un rétracte de $I \times I$.

5. En utilisant l'espace des morphismes (muni de la topologie compacte-ouverte) on peut aussi résumer la propriété d'extension d'homotopie (HEP) par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "H"] \arrow[d, "i"'] & Z^I \arrow[d, "ev_0"] \\
X \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "\exists"] & Z
\end{tikzcd}$$

Maintenant, notre situation est résumée par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z^I \arrow[d, "ev_0"] \\
X \arrow[r] \arrow[urr, dashed] & X \cup_A Y \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Z
\end{tikzcd}$$

Comme i est une cofibration, la flèche pointée de X ver Z^I existe. Or le carré à gauche est cocartésien ($X \cup_A Y$ est la colimite), la flèche pointée de $X \cup_A Y$ vers Z^I existe par la propriété universelle de colimite.

6. Voir le livre de J.P.May : *A Concise Course in Algebraic Topology*[4] Chapitre 6, Section 4, Page 45 - 46.

7. On rappelle que f est la composition de l'inclusion de X dans le cylindre de f (qui est une cofibration par la critère de NDR-paire) suivie par la projection du cylindre vers Y (qui est une équivalence d'homotopie).

Remarque :
D'après la critère de cofibration, c'est pas une condition très restreinte. On présente deux critères pour l'équivalence d'homotopie, *cf.* Allen Hatcher : *Algebraic Topology* Chapter 0. On va les énoncer dans le cadre de CW-complexes, quoiqu'ils sont valables dans le cas plus général de cofibration[5].

4. Il est disponible sur son page web.
http ://www.math.uchicago.edu/ may/BOOKSMaster.html
5. Voir l'exercice sur cofibration.

Théorème 3.7 (Critère I : Contraction d'un sous-espace contractile) *Soit* (X, A) *une paire de CW-complexe, supposons* A *est contractile, alors l'application quotient* $X \to X/A$ *est une équivalence d'homotopie.*

Théorème 3.8 (Critère II : Applications d'attachement homotopiques) *Soit* (X, A) *une parie de CW-complexe, soient* $f_0, f_1 : A \to Y$ *deux applications homotopiques. Alors* $Y \bigcup_{f_0} X$ *et* $Y \bigcup_{f_1} X$ *sont homotopiquement équivalents.*

Exercice 3.9 (Exemples d'équivalences d'homotopie) Expliquer les équivalences d'homotopie suivantes :

1. Soit $\mathbb{S}^n$ la sphère unité dans $\mathbf{R}^{n+1}$, soient P, Q deux points distincts de $\mathbb{S}^n$. Montrer que les trois espaces topologiques sont homotopiquement équivalents : $\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^n \cup [P, Q]$, $\mathbb{S}^n/_{P\sim Q}$.
2. **(Cofibre)** Soit (X, A) une paire de CW-complexe (ou plus généralement une cofibration), montrer que X/A et le cône de l'inclusion $Ci := CA \cup_A X$ sont homotopiquement équivalents. On appelle cet espace à homotopie près *la cofibre* de $A \to X$.
   Remarque : Par le principe de remplacement [6], pour $f : X \to Y$ un morphisme entre deux espaces topologiques, on définit la cofibre de f le cône Cf, qui est aussi le quotient Mf/X.
3. Soit X un espace topologique connexe par arc, soit S un sous-ensemble fini de X, tel que pour tout point $x \in S$, l'inclusion de x dans X est une cofibration (par exemple, X est un CW-complexe). Montrer que le quotient X/S est homotopiquement équivalent à $X \vee \underbrace{\mathbb{S}^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}^1}_{n-1}$, où n est la cardinalité de S.
4. Soit x un point d'un CW-complexe X, ou plus généralement, (X, x) un espace topologique pointé tel que l'inclusion du point base soit une cofibration. Montrer que la suspension (usuelle) $SX := \{0\} \times X \backslash X \times I / X \times \{1\}$ est homotopiquement équivalente à la suspension réduite $\Sigma X := \mathbb{S}^1 \wedge X$.

Indications:

1. Critère II implique l'équivalence entre le premier et le deuxième. Critère I implique l'équivalence entre le deuxième et le troisième.

2. Comme $i : A \to X$ est une cofibration, $CA \to Ci$ l'est aussi, parce que cofibration est stable par push-out (voir l'exercice sur cofibration).

3. D'abord, par 2. X/S homotopiquement équivalent à $X \cup CS$, et puis on applique successivement les deux critères.

4. Puisque la suspension réduite est juste le quotient de la suspension usuelle par le sous-espace contractile $\{x\} \times I$.

6. Voir l'exercice sur cofibration.

Exercice 3.10 (Groupoïdes) Un *groupoïde* est par définition une catégorie dans laquelle tout morphisme est un isomorphisme. Notons $\mathfrak{Gpd}$ la catégorie des groupoïdes.

1. Construire un foncteur $i : \mathfrak{Set} \to \mathfrak{Gpd}$;
2. Construire un foncteur $j : \mathfrak{Gp} \to \mathfrak{Gpd}$;
3. Soit $\{\mathscr{G}\}_{i\in I}$ un ensemble de groupoïdes. Montrer que le coproduit des ce famille existe dans la catégorie $\mathfrak{Gpd}$.
4. Soit $\mathscr{G}$ un groupoïde, vérifier que la relation définie par
$$x \sim y \Leftrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathscr{G}}(x,y) \neq \varnothing$$
est une relation d'équivalence sur $\mathsf{Obj}(\mathscr{G})$ et on définit $\pi_0(\mathscr{G}) := \mathsf{Obj}(G)/\sim$. Le groupoïde est *connexe* si $\pi_0(\mathscr{G}) = \{*\}$. En général, montrer qu'il existe une équivalence de groupoïdes :
$$\mathscr{G} \simeq \coprod_{j\in\pi_0(\mathscr{G})} \mathscr{G}_j,$$
où $\mathscr{G}_j$ est connexe (les $\mathscr{G}_j$ sont les composantes connexes de $\mathscr{G}$).
5. Soient $\mathscr{G}$ un groupoïde connexe et $x \in \mathsf{Obj}(\mathscr{G})$. Montrer que l'inclusion $\mathrm{Aut}(x) \hookrightarrow \mathscr{G}$ est une équivalence de groupoïdes, où $\mathrm{Aut}(x)$ est la sous-catégorie pleine à un seule objet x.

Indications:

1. On associe à un ensemble le groupoïde discret, *i.e.* touts les morphismes sont des identités.

2. On voit un groupe comme une catégorie à un objet, les éléments du groupe sont les morphismes de cet objet. L'existence des inverses implique que c'est un groupoïde.

5. Il suffit de montrer que ce foncteur est pleinement fidèle (par hypothèse) et essentiellement surjectif (par la connexité).

Exercice 3.11 (Groupoïdes fondamentaux) Soit X est un espace topologique, on considère la catégorie $\Pi_1(X)$ suivante :

- Les objets : les points de X ;
- Les flèches : pour deux points $x, y \in X$, on définit l'ensemble des morphismes $\mathrm{Mor}(x,y)$ comme l'ensemble des chemins de x à y modulo l'équivalence d'homotopie (relative aux extrémités.)

1. Montrer que $\Pi_1(X)$ est un groupoïde pour X un espace topologique ;
2. Montrer que $\Pi_1 : \mathfrak{Top} \to \mathfrak{Gpd}$ est un foncteur ;

3. On suppose de plus que X est connexe par arcs. Montrer que $\pi_1(X) \to \Pi_1(X)$ est une équivalence de catégories, où on voit le groupe fondamental de X comme un groupoïde à un objet par le foncteur naturel $j : \mathfrak{Gp} \to \mathfrak{Gpd}$.
4. Si X, Y sont deux espaces topologiques homotopiquement équivalents, établir une équivalence de catégories entre $\Pi_1(X)$ et $\Pi_1(Y)$.